ECON 2200, Lineær approximasjon og differensialer - Handout

Kjell Arne Brekke

February 28, 2012

1 Inverse funksjoner

En sammenheng mellom prisen p på en vare og etterspørselen D kan vi lese på to måter. Om prisen er p hvor hvor stor blir da etterspørselen, eller vi kan spørre. Om vi skal selge et kvantum D hvilken pris kan vi da ta? Den første fir kvantum D som en funksjon av prisen p, mens den andre gir prisen p som en funksjon av kvantum D.

Mer generelt: Sammenhengen

$$y = f(x)$$

gir en sammenheng mellom x og y. Men sammenhengen kan også definere også y som en funksjon av x, implisitt

$$y = f(x(y)).$$

Vi kan da finne

Oppgave 1 *Finn $x'(y)$ ved implisitt derivasjon. Dvs: deriver ligningen $y = f(x(y))$ med hensyn på y og løs for $x'(y)$.Resultatet blir:*

1. $x'(y) = \frac{y}{x}$
2. $x'(y) = \frac{1}{f'(y)}$
3. $x'(y) = \frac{1}{f'(x)}$
4. $x'(y) = f'(x)x'(y)$

2 Lineær approximasjon

Fra definisjonen av derivasjon vet vi at

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

for små verdier av Δx. Dette kan vi skrive om som

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

eller

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Denne ligningen blir utgangspunktet for en lineær approximasjon. La oss nå velge oss en bestemt x-verdi x_0, og si vi kjenner $f(x_0)$ og $f'(x_0)$. Hva kan vi da si om $f(x)$ for en vilkårlig annen verdi av x? Merk da at vi kan la

$$\Delta x = x - x_0$$

da er jo

$$x = x_0 + \Delta x$$

og

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Vi samler til slutt alle ledd hvor ikke x ingår, og kaller dem K (for Konstant)

$$\begin{aligned} f(x) &= K + f'(x_0)x \\ K &= (f(x_0) - x_0 f'(x_0)) \end{aligned}$$

Eksempel: Vi ønsker en lineær approximasjon til $f(x) = x^2$ rundt punktet $x_0 = 1$ Vi har da at

$$x_0 = 1,\ f(x_0) = 1^2 = 1, \text{ og } f'(x_0) = 2(1) = 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 1 + 2(x - 1) = 2x - 1 \end{aligned}$$

altså er

$$x^2 \approx 2x - 1 \text{ for } x \approx 1$$

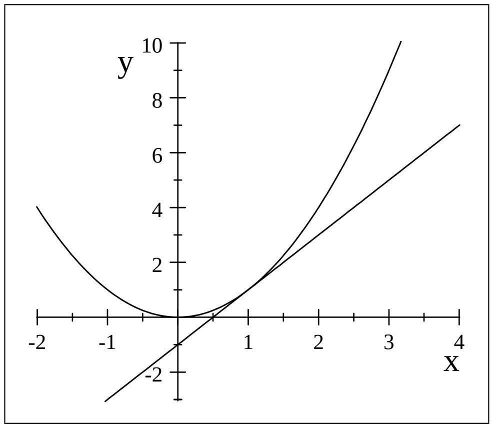
og siden høyresiden, $2x-1$, er en lineær funksjon, kaller vi dette en lineær approximasjon.

Kontroll: Når vi sier at $f(x) \approx 2x - 1$ for x nær $x_0 = 1$, bør dette stemme akkurat i punktet x_0. Vi sjekker $f(x_0) = 1$ mens $2x_0 - 1 = 2 - 1 = 1$. I punktet x_0 stemmer det altså eksakt.

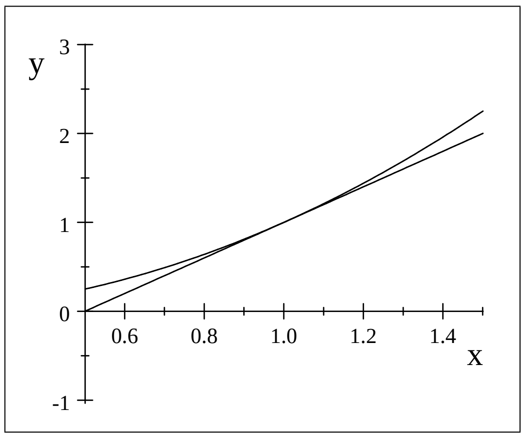
Oppgave 2 *Lag en lineær approximasjon til* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ *rundt punktet* $x_0 = 1$. *Svaret blir*

1. $f(x) \approx 2 + 2x$
2. $f(x) \approx 0 + 2x$
3. $f(x) \approx 2 + 4x$
4. $f(x) \approx -2 + 4x$

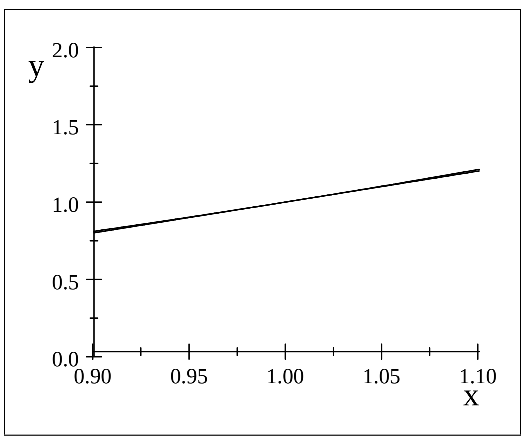
I figuren nedenfor har vi tegnet f og approximasjonen i området $-2 < x < 4$ og vi ser at approximasjonen er dårlig, særlig for $x > 2$ og $x < 0$.



I intervallet $0,5 < x < 1,5$ derimot ble bildet et helt annet,



og for $0,9 < x < 1,1$, kan vi nesten ikke skille kruvene med den gitte grafiske oppløsningen



I et lite område rundt $x = 1$ er $2x - 1$ altså en svært god tilnerming til x^2.

3 Differensialer

Det faktiske endringen i funksjonverdien kaller vi

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

mens tilnermingen kalles differensialet

$$dy = f'(x)dx$$

Ofte skriver vi det som

$$df = f'(x)dx$$

Sjekk regnereglene for differensialer i læreboka.

Oppgave 3 *Dersom $y = x^2$ så blir differensialet:*

1. $dy = 2xdx$
2. $dy = x^2dx$
3. $dy = \frac{dx}{2x}$

4 Lineær approximasjon for med funksjoner av flere variable:

Med flere variabler kan vi gjøre tilsvarende. La $z = f(x, y)$. Vi skal vise på forelesning at vi kan skrive

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) \\ &\approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \end{aligned}$$

Ved å la $x - x_0 = \Delta x$ og $y - y_0 = \Delta y$ gir det den lineære approximasjonen:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

For $x_0 = 1, y_0 = 2$ og $f(x, y) = xy$ får vi da

$$\begin{aligned} xy &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 1(y - 2) = 2x + y - 2 \end{aligned}$$

Oppgave 4 *Lag en lineær approximasjon til $f(x, y) = 3 + xy + x^2$ rundt punktet $x_0 = 2, y_0 = 1$*

1. $f(x, y) \approx 3 + 5x + 2y$
2. $f(x, y) \approx 9 + 5x + 2y$
3. $f(x, y) \approx -3 + 5x + 2y$

4.1 Implisitt derivasjon med lineær approximasjon

Oppgave 5 *I oppgaven ovenfor fant vi at i nærheten av punktet* $x_0 = 2, y_0 = 1$ *så er* $f(x,y) \approx K + 5x + 2y$ *der* K *er en konstant som jeg ikke vil avsløre her. Bruk dette til å regne ut stigningstallet til nivåkurven* $y(x)$ *gjennom punktet* $x_0 = 2, y_0 = 1$. *(Hint: Hva er nivåkurven til funksjonen* $h(x,y) = K + 5x + 2y$*)*

1. $y'(x_0) = -\frac{5}{2}$
2. $y'(x_0) = -\frac{2}{5}$
3. $y'(x_0) = -\frac{K+10}{2}$